Berkala Ilmiah FMIPA - UGM, Tahun V, No. 1, Januari 1994
hal. 51 - 62

BEBERAPA TEOREMA KEKONVERGENAN PADA INTEGRAL AH

Bambang Soedijono

Jurusan Matematika, FMIPA - UGM, Yogyakarta 55281

INTISARI

Integral AH merupakan suatu integral yang didefinisikan menurut jumlahan Riemann dan integral tersebut equivalen dengan integral Kubota-AD. Dicari syarat cukup agar limit barisan fungsi terintegral AH juga merupakan fungsi terintegral AH.

Some Convergence Theorems for AH Integrals

ABSTRACT

The AH (Approximate Henstock) integral is one defined as a Riemann-type sum and is equivalent to a Kubota-AD integral. We explore some sufficient conditions in order that the limit of a sequence of AH-integrable functions is also AH-integrable.

I. PENDAHULUAN

Integral AH merupakan definisi konstruktif integral Kubota-AD dan definisi itu berbentuk jumlahan Riemann yang dikenal dengan definisi tipe Riemann (B. Soedijono dan Lee Peng Yee, 1991]. Definisi tipe Riemann suatu integral disusun berdasarkan suatu pengertian liput penuh.

Diberikan $\{ X_i \}$ suatu barisan himpunan tertutup sehingga $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = [a, b]$. Pada X_i, untuk setiap i, terdapat fungsi δ sehingga untuk setiap $\xi \in X_i$, $\delta(\xi, i) > 0$ dan ada himpunan $D_{\xi,i}$ berketumpatan 1 di ξ, dengan $\xi \in D_{\xi,i}$. Liput penuh-AD Δ pada barisan $\{ X_i \}$ adalah keluarga pasangan selang-titik $([u, v]; \xi)$, dengan $u \le \xi \le v$, $0 \le v - u \le \delta(\xi, i)$ dan $u \in X_i$ jika ξ merupakan titik limit himpunan $[u, \xi] \cap X_i$ atau $u \in D_{\xi,i}$ jika ξ bukan titik limit himpunan $[u, \xi] \cap X_i$, dan $v \in X_i$ jika ξ merupakan titik limit himpunan $[\xi, v] \cap X_i$ atau $v \in D_{\xi,i}$ jika ξ bukan titik limit himpunan $[\xi, v] \cap X_i$. Liput penuh-AD Δ pada $\{ X_i \}$ bergantung pada barisan $\{ X_i \}$, $\delta(\xi, i)$ dan $D_{\xi,i}$, ditulis

$$\Delta = \Delta(\{ X_i \}, \delta(\xi, i), D_{\xi,i})$$

dan $\qquad ([u, v]; \xi) \in \Delta.$

Jika Δ adalah liput penuh-AD pada $\{ X_i \}$ dengan $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = [a, b]$, maka partisi

$\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} = \{([x_{i-1}, x_i]; \xi_i)\}$ dengan $([x_{i-1}, x_i]; \xi_i) \in \Delta$, disebut partisi-$\Delta$ pada $[a, b]$.

Misalkan $\{X_i\}$ suatu barisan himpunan tertutup dengan $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$. Barisan himpunan tertutup $\{X_i^*\}$ dengan $X_i^* \subset X_j$ untuk suatu j yang memenuhi $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i^*$ disebut patahan barisan $\{X_i\}$. Dengan demikian terlihat bahwa setiap X_i merupakan gabungan barisan-bagian dari $\{X_i^*\}$.

Fungsi f terdefinisi pada selang $[a, b]$ dikatakan terintegral AH pada $[a, b]$, jika ada bilangan A sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat barisan himpunan tertutup $\{X_i\}$, $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, sehingga untuk setiap $\{X_i^*\}$ patahan barisan $\{X_i\}$ terdapat Δ liput penuh-AD pada $\{X_i^*\}$ dan untuk setiap D partisi-Δ pada $[a, b]$ berlaku

$$|\ (\mathrm{D}) \textstyle\sum f(\xi)(v-u) - A\ | < \varepsilon.$$

Bilangan A disebut nilai integral AH fungsi f pada $[a, b]$ dan biasa ditulis

$$(\mathcal{AH}) \int_a^b f(x)\, dx = A.$$

Jika fungsi f terintegral AH pada $[a, b]$, maka fungsi f juga terintegral AH pada $[a, x] \subset [a, b]$, untuk setiap $x \in [a, b]$ (Soedijono, 1993). Oleh karena itu dapat didefinisikan fungsi $F : [a, b] \to \mathcal{R}$ dengan

$$F(x) = (\mathcal{AH}) \int_a^x f(t)\, dt,$$

dan disebut primitif-AH fungsi f pada selang $[a, b]$. Selanjutnya diperoleh

$$(\mathcal{AH}) \int_a^b f(x)\, dx = F(a,b) = F(b) - F(a).$$

2. TEOREMA KEKONVERGENAN

Pada bagian ini dimuat bahasan penelitian yang mengungkapkan berbagai syarat cukup yang diperlukan agar supaya fungsi f terintegral AH pada selang $[a, b]$, jika fungsi f merupakan limit barisan fungsi $\{f_n\}$ dengan f_n terintegral AH pada selang $[a, b]$. Syarat-syarat cukup yang ditemukan disusun menjadi beberapa teorema kekonvergenan.

Definisi 2. 1

Diketahui, untuk setiap n, fungsi f_n terintegral AH pada selang $[a, b]$ dengan fungsi primitif-AH F_n. Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan terintegral-AH serentak (*equi-integrable*) pada $[a, b]$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat barisan himpunan tertutup $\{X_i\}$, dengan $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ sehingga untuk setiap $\{X_i^*\}$ patahan $\{X_i\}$ terdapat $\Delta = \Delta(\{X_i^*\}, \delta(\xi, i), D_{\xi,i})$ liput penuh-AD pada $\{X_i^*\}$, dan untuk setiap D partisi-Δ pada $[a, b]$ dan untuk setiap n berlaku

$$|\ (\mathrm{D}) \textstyle\sum f_n(\xi)(v-u) - F_n(a,b)\ | < \varepsilon.$$

Teorema 2. 2

Jika barisan $\{f_n\}$ memenuhi kondisi-kondisi

(1) $f_n \to f$ pada $[a, b]$ dan masing-masing f_n terintegral AH pada $[a, b]$

(2) $\{f_n\}$ terintegral-AH serentak pada $[a, b]$,

maka fungsi f juga terintegral AH pada $[a, b]$, dan berlaku

$$(\mathcal{AH}) \int_a^b f_n(x)\, dx \to (\mathcal{AH}) \int_a^b f(x)\, dx$$

untuk $n \to \infty$.

Bukti : Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $f_n \to f$ pada $[a, b]$, maka untuk setiap $\xi \in [a, b]$ terdapat bilangan asli $M(\xi)$ sehingga untuk semua $n > M(\xi)$ berlaku

$$|\ f(\xi) - f_n(\xi)\ | < \tfrac{1}{6}\varepsilon/(b-a).$$

Dari kondisi (2) terdapat barisan himpunan tertutup $\{X_i\}$ dengan $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, sehingga untuk setiap $\{X_i^*\}$ patahan $\{X_i\}$ terdapat suatu $\Delta = \Delta(\{X_i^*\}, \delta(\xi, i), D_{\xi,i})$ liput penuh-AD pada $\{X_i^*\}$, sehingga untuk setiap D partisi-Δ pada $[a, b]$ berlaku

$$|\ (\mathrm{D}) \textstyle\sum f_n(\xi)(v-u) - A_n\ | < \varepsilon/3$$

untuk setiap n.

Bilangan A_n menyatakan nilai integral AH fungsi f_n pada $[a, b]$, yaitu

$$A_n = (\mathcal{AH}) \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Ambil D_0 sebarang partisi-Δ pada $[a, b]$, maka untuk setiap n berlaku

$$|\ (D_0) \textstyle\sum f_n(\xi)(v-u) - A\ | < \varepsilon/3.$$

Sebut $S_n = (D_0) \sum f_n(\xi)(v-u)$ dan $M = \sup\{M(\xi), \xi \text{ pada } D_0\}$. Selanjutnya untuk $n, m > M$ diperoleh

$$\begin{aligned}
|\ S_n - S_m\ | &= |\ (D_0) \textstyle\sum f_m(\xi)(v-u) - (D_0) \textstyle\sum f_m(\xi)(v-u)\ | \\
&= |\ (D_0) \textstyle\sum \{f_n(\xi) - f_m(\xi)\}(v-u)\ | \\
&\le (D_0) \textstyle\sum |\ f_n(\xi) - f_m(\xi)\ |\ (v-u) \\
&< \tfrac{1}{3}\{\varepsilon/(b-a)\}\,(D_0) \textstyle\sum (v-u) \\
&\le \tfrac{1}{2}\{\varepsilon/(b-a)\}\,(b-a) = \varepsilon/3.
\end{aligned}$$

Ini memberikan $\{S_n\}$ sebagai suatu barisan Cauchy. Untuk partisi D_0 di atas dan $n, m > M$ diperoleh hubungan

$$\begin{aligned}
|A_n - A_m| &\le |A_n - S_n| + |S_n - S_m| + |\ S_m - A_m\ | \\
&\le |\ A_n - (D_0) \textstyle\sum f_n(\xi)(v-u)\ | + |S_n - S_m| + |\ (D_0) \textstyle\sum f_m(\xi)(v-u) - A_m\ | \le \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ini memberikan $\{A_n\}$ sebagai suatu barisan Cauchy, berarti barisan $\{A_n\}$ konvergen, katakan konvergen ke A.

Karena A_n menyatakan nilai integral AH fungsi f_n pada $[a,b]$, maka mudah difahami bahwa nilai A tunggal.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa

$$A = (\mathcal{AH}) \int_a^b f(x)\,dx.$$

Untuk D_0 sebarang partisi-Δ pada $[a,b]$ di atas berlaku

$$|(D_0)\sum f(\xi)(v-u) - A| \le$$

$$|(D_0)\sum f(\xi)(v-u) - (D_0)\sum f_n(\xi)(v-u)|$$

$$+\ |(D_0)\sum f_n(\xi)(v-u) - A_n|$$

$$+\ |A_n - A| \le |(D_0)\sum \{f_n(\xi)(v-u)$$

$$-\ A_n| + |A_n - A| \le |(D_0)\sum \{f(\xi)$$

$$-\ f_n(\xi)\}(v-u)| + |(D_0)\sum f_n(\xi)(v-u)$$

$$-\ A_n| + |A_n - A|$$

Ambil $n > M$ maka diperoleh

$$|(D_0)\sum f(\xi)(v-u) - A|$$

$$\le |D_0)\sum \{f(\xi) - f_n(\xi)(v-u)|$$

$$+\ |D_0)\sum f_n(\xi)(v-u) - A_n|$$

$$+\ |A_n - A| \le \tfrac{1}{3}\{\varepsilon/(b-a)\}(b-a)$$

$$+\ \tfrac{1}{3}\varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Dengan kata lain terbukti fungsi f terintegral AH pada $[a,b]$. ■

Selanjutnya teorema kekonvergenan-AD yang lain diungkapkan sebagai teorema berikut.

Teorema 2. 3 (Teorema Kekonvergenan-AD)

Misalkan $\{f_n\}$ merupakan barisan fungsi terintegral AH pada selang $[a,b]$ dengan fungsi primitif-AH F_n. Jika ketiga kondisi di bawah ini dipenuhi :

(1) $f_n \to f$ hampir di mana-mana pada $[a,b]$,

(2) $\{F_n\}$ konvergen titik demi titik pada $[a,b]$ ke suatu fungsi F,

(3) untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $\xi \in [a,b]$ terdapat $N(\xi)$ himpunan tak hingga banyak bilangan asli, dan terdapat suatu barisan himpunan tertutup $\{X_i\}$, dengan $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, sehingga untuk setiap $\{X_i^*\}$ patahan $\{X_i\}$ terdapat Δ liput penuh-AD pada $\{X_i^*\}$ sehingga untuk setiap D partisi-Δ pada $[a,b]$ berlaku

$$|(D)\sum F_m(u,v) - F(a,b)| < \varepsilon$$

untuk tak hingga banyak $m \in N(\xi)$,

maka fungsi f terintegral AH pada $[a,b]$ dengan fungsi primitif -AH F.

Bukti : Tanpa mengurangi arti, dianggap bahwa $f \to f$ di mana-mana pada $[a,b]$ dalam kondisi (1).

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang.

Karena f_n terintegral-AH pada $[a,b]$, dengan fungsi primitif-AH F_n, untuk setiap n, maka terdapat barisan himpunan tertutup $\{X_{n,i}\}$, dengan $[a,b]$

$= \bigcup_{i=1}^{\infty} X_{n,i}$ sehingga untuk setiap $\{X_{n,i}^*\}$ patahan $\{X_{n,i}\}$ terdapat $\Delta_n = \Delta(\{X_{n,i}^*\}, \delta(\xi, i), D_{n,\xi,i})$ liput penuh-AD pada $\{X_{n,i}^*\}$ dan untuk setiap D_n partisi-Δ pada $[a,b]$ berlaku

$$|(D_n)\sum \{f_n(\xi)(v-u) - F_n(u,v)\}| < \varepsilon 2^{-n-1}.$$

Menurut kondisi (3) untuk ε tersebut di atas, dan untuk setiap $\xi \in [a,b]$, terdapat himpunan bilangan asli $N(\xi)$ dan barisan himpunan tertutup $\{X_{n,i}\}$ dengan $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_{n,i}$, sehingga untuk setiap $\{X_{n,i}^*\}$ patahan $\{X_{m,i}\}$, terdapat $\Delta_n = \Delta(\{X_{ni}^*\}, \delta_n(\xi,i), D_{n\xi,i})$ liput penuh-AD, pada $\{X_{n,i}^*\}$ sehingga untuk setiap D_n partisi-Δ pada $[a,b]$ berlaku

$$|(D_n)\sum \{F_m(u,v) - F(a,b)\}| < \varepsilon \tag{1}$$

untuk tak hingga banyak $m \in N(\xi)$.

Ambil $X_{nij}^* = X_{ni}^* \,\dot\cup\, X_j^*$,

$$\delta(\xi, i, j) = \min\{\delta_n(\nu, i),\ \delta(\xi, j)\},$$

$$D_{\xi,i,j} = D_{n\xi i} \cap D_{\xi,j},$$

maka $\{X_{nij}^*\}$ merupakan patahan $\{X_{ni}\}$ ataupun $\{X_j\}$, dan $\Delta_0 = \Delta\left(\{X_{nij}^*\}, \delta(\xi, \iota, \kappa), D_{\xi,i,j}\right)$ adalah liput penuh-AD pada $\{X_{nij}^*\}$.

Jelas $\Delta_0 \subset \Delta_n$ dan $\Delta_0 \subset \Delta$.

Untuk setiap $\xi \in [a,b]$, ambil semua $m(\xi) \in N(\xi)$ yang memenuhi pers. (1) dan $|f_{m(\xi)}(\xi) - f(\xi)| < \varepsilon/(b-a)$.

Ini dimungkinkan karena $f_m \to f$.

Perhatikan untuk setiap $m(\xi)$ di atas terdapat bilangan bulat $j(\xi)$ sehingga $\xi \in X_{m(\xi),i,j(\xi)}^*$.

Jelas bahwa

$$\{X_{m(\xi)ij(\xi)}^* \mid \xi \in [a,b]\} \in \{X_{nij}^*\}$$

dan

$$\cup\{X_{m(\xi)ij(\xi)}^* \mid \xi \in [a,b]\} = [a,b]$$

dan banyaknya $\{X_{m(\xi)ij(\xi)}^* \mid \xi \in [a,b]\}$ terhitung.

Setelah disusun dalam bentuk indeks baru dan dinyatakan dengan notasi X_k^* sehingga

$$\cup\{X_{m(\xi)ij(\xi)}^* \mid \xi \in [a,b]\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k^*$$

Maka $\{X_k^*\}$ adalah patahan dari $\{X_j\}$ dan $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k^* = [a,b]$.

Sebut $\Delta_1 = \Delta_1(\{X_k^*\}, \delta(\xi, k), D_{\xi,k})$ liput penuh-AD pada $\{X_k^*\}$ dengan

$$\delta(\xi, k) = \delta\Big(n, i, j(\xi)\Big)$$

$$\Delta_{\xi k} = D_{\xi i, j(\xi)}$$

dalam penyesuaian indeks.

Maka $\Delta_1 \subset \Delta_0$ berarti $\Delta_1 \subset \Delta_{m(\xi)}$ untuk setiap $m(\xi)$ yang dipilih dan untuk setiap D partisi-Δ pada $[a,b]$ berlaku

$$|(D)\sum F_{m(\xi)}(u,v) - F(a,b)| < \varepsilon .$$

Jika D_n (partisi D_n pada $[a,b]$) merupakan partisi bagian dari DD pada $[a,b]$, maka menurut lemma Henstock berlaku

$$|(D_n)\sum\{ff_n(\xi)(v-u) - F(u,v)\}| < \varepsilon 2^{-n}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$|(D)\sum f(\xi)(v-u) - F(a,b)|$$
$$\le (D)\sum |f(\xi) - f_{m(\xi)}|(v-u)]$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}|(D_n)\sum\{f_{m(\xi)}(\xi)(v-u)$$
$$- F_{m(\xi)}(u-v)\}| +$$
$$+ |(D)\,S\,F_{m(\xi)}(u,v) - F(a,b)|$$

Dengan demikian fungsi f terintegral AH pada $[a,b]$ dengan primitif-AH F, dan berlaku

$$(\mathcal{AH})\int_a^b f(x)\,dx = F(a,b). \blacksquare$$

Selanjutnya dibahas hubungan antara barisan fungsi terintegral serentak dengan kekonvergenan-AD, dan juga hubungan antara barisan fungsi konvergen rata-rata teritlak dengan terintegral serentak, sebagaimana diungkapkan dengan dua teorema berikut ini.

Teorema 2.4

Diketahui $\{f\}$ suatu barisan fungsi, dengan $f_n \to f$ di mana-mana pada $[a.b]$ dan untuk semua $n\, f_n$ terintegral AH pada $[a,b]$ dengan fungsi-primitif-AH F_n. Jika $\{f_n\}$ terintegral serentak pada $[a,b]$ maka $\{f_n\}$ konvergen-AD ke f pada $[a,b]$.

Bukti : Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang.

Karena $f_n \to f$ pada $[a,b]$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan setiap $\xi \in [a,b]$, terdapat $m(\xi)$ sehingga untuk semua $n, m > m(\xi)$ berlaku

$$|f_n(\xi) - f_m(\xi)| < \varepsilon/(b-a).$$

Karena barisan $\{f_n\}$ terintegral serentak pada $[a,b]$, maka terdapat barisan himpunan tertutup $\{X_i\}$, $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} X$ sehingga untuk setiap $\{X_i^*\}$ patahan $\{X_i\}$ terdapat Δ liput penuh-AD pada $\{X_i^*\}$, semuanya tidak tergantung pada n, dan untuk setiap D partisi-Δ pada $[a,b]$ dan untuk semua n berlaku

$$|(D)\sum f_n(\xi) - v - u) - F_n(a,b)| < \varepsilon 2^{-n}.$$

Untuk setiap $x \in [a,b]$, ambil $D_x = \{([u,v],\xi)\}$ partisi-Δ bagian dari Δ untuk $\xi \in [a,x]$, dan berdasarkan lemma Henstock diperoleh

$$|(D)\sum\{f_n(\xi)(v-u) - F_n(u,v)\}| < \varepsilon 2^{-n} \text{ untuk semua n.}$$

Revisi D_x sehingga $D_x = \{([u,v],\xi)\}$ merupakan partisi-Δ pada $[a,x] \subset [a,b]$ dan pertidaksamaan di atas tetap berlaku.

Selanjutnya untuk $n,m > m(\xi)$ dengan $\xi \in [a,b]$ didapat

$$|F_n(a,x) - F_m(a,x)| = |(D_x)\sum F_n(u,v)$$
$$- (D_x)\sum F_m(u,v)| \le |(D_x)\sum F_n(u,v)$$
$$- (D_x)\sum f_n(\xi)(v-u)|$$
$$+ |(D_x)\sum f_n(\xi)(v-u)|$$
$$- (D_x)\sum f_m(\xi)(v-u)$$
$$+ (D_x)\sum f_m(\xi)(v-u)|$$
$$- (D_x)\sum F_m(u,v)| \le |(D_x)\sum\{F_n(u,v)$$
$$- f_n(\xi)(v-u)| + (D_x)\sum |f_m(\xi)$$
$$- f_m(\xi)|(v-u)$$
$$+ |(D_x)\sum\{f_m(\xi)(v-u) - F_m(u,v)\}|$$
$$\le \sum_{n=m(\xi)}^{\infty}\varepsilon 2^{-n} + \{\varepsilon/(b-a)\}(D_x)\sum(v-u)$$
$$+ \sum_{m=m(\xi)}^{\infty}\varepsilon 2^{-m} \le \varepsilon + \varepsilon(x-a)/(b-a)\,\varepsilon$$
$$\le 3\varepsilon$$

Terlihat bahwa barisan $\{F_n(a,x)\}$ merupakan suatu barisan Cauchy untuk setiap $x \in [a,b]$ dan katakan $F_n(a,x) \to A_x$.

Selanjutnya definisikan fungsi F secara

$$F(x) = A_x \quad x \in [a,b],$$

dan $F(a) = 0$ sehingga diperoleh

$$F(a,x) = F(x) - F(a) = F(x),\ x \in [a,b].$$

Terlihat bahwa $F_n \to F$ di mana-mana pada $[a,b]$.

Karena $\{f_n\}$ terintegral serentak pada $[a,b]$, dengan $f_n \to f$ di mana-mana pada $[a,b]$, berdasarkan Teorema 2.2 diketahui fungsi f terintegral AH pada $[a,b]$ dengan fungsi primitif-AH F di atas, berarti

$$|(D)\sum f(x)(v-u) - F(a,b)| < \varepsilon$$

dengan D merupakan suatu partisi-Δ pada $[a,b]$ di atas.

Untuk $\xi \in [a,b]$, ambil himpunan bilangan asli $N(\xi) = \{n \mid n \ge m(\xi)\}$

$$|(D)\sum F_{m(\xi)}(u,v) - F(a,b)|$$
$$|(D)\sum |F_{m(\xi)}(u,v)|$$
$$\le (D)\sum |F_{m(\xi)}(u,v) - f_{m(\xi)}(\xi)(v-u)|$$
$$+ (D)\sum |f_{m(\xi)}(\xi) - F(\xi)|(v-u)$$
$$+ |(D)\sum f(\xi)(v-u) - F(a,b)|$$
$$\le \varepsilon + \{\varepsilon/(b-a)\}(b-a) + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Terbukti barisan $\{f_n\}$ konvergen-AD ke f pada $[a,b]$. $\blacksquare$

Teorema 2.5

Diketahui fungsi $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ masing-masing terintegral AH pada $[a,b]$ dengan fungsi primitif-AH F_n. Jika barisan $\{f_n\}$ konvergen rata-rata teritlak ke f pada $[a,b]$ maka terdapat suatu barisan bagian dari $\{f\}$ yang terintegral serentak pada $[a,b]$.

Bukti : Tanpa mengurangi keumuman anggap $f_n \to f$ di mana-mana pada $[a,b]$.

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang.

Karena barisan fungsi $\{F_n\}$ konvergen rata-rata teritlak ke f pada $[a,b]$, berarti terdapat barisan himpunan tertutup $\{X_i\}$, $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, sehingga untuk setiap i, dan untuk setiap j terdapat N_{ij} sehingga untuk setiap partisi bagian D pada $[a,b]$ dengan $u, v \in X_i$ berlaku

$$(D)\sum |F_n(u,v) - F_m(u,v)| < \varepsilon\, 2^{-i-1};$$

$$n, m \ge N_{ij}$$

Karena $f_n \to f$ di mana-mana pada $[a, b]$, maka untuk setiap $\xi \in X_i$ terdapat $m(\xi, i) > N_{ii}$ sehingga $|f_n(\xi) - f_m(\xi)| < \{\varepsilon/(b-a)\}$; $n, m > m(\xi, i)$.

Karena masing-masing fungsi f_n ter integral AH pada $[a,b]$, maka terdapat barisan himpunan tertutup $\{X_{ni}\}$, $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_{ni}$ sehingga untuk setiap $\{X^*_{ni}\}$ patahan $\{X_{ni}\}$ terdapat Δ_n liput penuh-AD pada $\{X^*_{ni}\}$ sehingga untuk setiap D partisi-Δ pada $[a,b]$ berlaku

$$|(D)\sum \{f_n(\xi)(v-u) - F_n(u,v)\}| < \epsilon\, 2^{-n}.$$

Tanpa mengurangi keumuman, diambil $X^*_{ni} = X_{ni}$ dan dimisalkan $\Delta_m \in \Delta_n$ untuk semua $m > n$, dan untuk setiap n, $\{X_{ni}\}$ merupakan patahan dari $\{X_i\}$.

Pertama-tama tinjau untuk X_1.

Untuk setiap j terdapat N_{1j} sehingga untuk setiap partisi D pada $[a,b]$ dengan $u, v \in X_1$, terdapat suatu barisan bagian $\{F_{n_{1m}}\}$ dari $\{F_n\}$ sehingga berlaku

$$(D)\sum |F_{m_{1n}}(u,v) - F_{n_{1m}}(u,v)| < \varepsilon\, 2^{-n-j}$$

untuk semua $n_{1n}, n_{1m} > N_{1j}$.

Kemudian ditinjau untuk X_2.

Maka untuk setiap j terdapat $N_{2j} \in \{N_{1j}\}$ sehingga untuk setiap partisi D pada $[a,b]$ dengan $u, v \in X_2$ terdapat barisan bagian $\{F_{n_{2j}}\}$ dari $\{F_{n_{1j}}\}$ sesehingga berlaku

$$(D)\sum |F_{n_{2n}}(u,v) - F_{n_{2m}}(u,v)| < \varepsilon\, 2^{-2-j}$$

untuk semua $n_{2n}, n_{2m} > N_{2j}$ dan juga untuk $u, v \in X_1$.

Langkah di atas diulang untuk X_3, $X_4, \ldots$ dan secara umum diperoleh :

untuk setiap j, terdapat $N_{kj} \in \{N_{(k-1)j}\}$ sehingga untuk setiap partisi DD pada $[a, b]$ dengan $u, v \in X_k$, terdapat barisan bagian $\{F_{n_{kj}}\}$ dari $\{F_{n_{(k-1)j}}\}$ sehingga berlaku

$$(D)\sum |F_{n_{kn}}(u,v) - F_{n_{km}}(u,v)| < \epsilon\, 2^{-k-j}$$

untuk semua $n_{kn}, n_{km} > N_{kj}$.

Hubungan ini juga berlaku untuk u, $v \in X_j$, $j = 1, 2, \ldots\ldots, (k-1)$ dan $\{N_{kj}\}_{j\ge1} \subset \{N_{(k-1)j}\}_{j\ge1}$.

Dengan mempergunakan proses pendiagonalan, diperoleh barisan bagian $\{F_{N_{ii}}\}$ dari $\{F_{n_{ij}}\}$, untuk semua i dan j, sehingga untuk setiap partisi D pada $[a,b]$ berlaku

$$(D)\sum |F_{N_{nn}}(u,v) - F_{N_{mm}}(u,v)| < \varepsilon 2^{-2i}$$

untuk semua $N_{nn}, N_{mm} > N_{ii}$ dan $u, v \in X_i$ untuk semua i.

Karena X_i tertutup, X_i merupakan gabungan himpunan perfek (*perfect set*) dan suatu himpunan kontabel $\{\xi_1, \xi_2, \ldots.\}$. Ambil D_{ξ_k} himpunan berketumpatan 1 di ξ_{1k}, $\xi_k \in D_{\xi_k}$ sehingga

$$|F_{m(\xi_k k)}(u,v| < \varepsilon\, 2^{-k};\ (u,v) \in D_{\xi_k}.$$

Selanjutnya dibentuk D liput penuh-AD pada $\{X_i\}$ sebagai berikut:

jika $\xi \in X_i$ diambil

$$\delta(\xi, i) = \delta_{m(\xi,j)}(\xi, j)$$

dan $D_{\xi,i} = D_{m(\xi,i),\xi,j} \cap D_{\xi_k}$.

Untuk D partisi-Δ pada $[a,b]$ dan diambil D_1, D_2 yang merupakan partisi bagian dari D berurut-turut untuk $m(\xi,i) \ge N_{ii}$ dan untuk $m(\xi,i) < N_{ii}$, maka

$$|(D)\sum \{f_{N_{ii}}(\xi)(v-u) - F_{N_{ii}}(u,v)\}|$$
$$\le |(D_1)\sum \{f_{N_{ii}}(\xi)(v-u) - F_{N_{ii}}(u,v\}|$$
$$+ |(D_2)\{f_{N_{ii}}(\xi) - f_{m(\xi,i)}(\xi)\}(v-u)|$$
$$+ |(D_2)\sum \{f_{m(\xi,i)}(\xi)(v-u) - F_{m(\xi,i)}(u,v)\}|$$
$$+ |(D_2)\sum \{F_{m(\xi,i)}(u,v) - F_{N_{ii}}(u,v)\}|$$
$$\le |(D_1)\sum \{f_{N_{ii}}(\xi)(v-u) - F_{N_{ii}}(u,v)\}|$$
$$+ (D_2)\sum \{f_{N_{ii}}(\xi) - f_{m(\xi,i)}(\xi)|(v-u)u)$$
$$+ |(D_2)\sum \{f_{m(\xi,i)}(\xi)(v-u) - F_{m(\xi,i)}(u,v)\}|$$
$$+ |(D_{21})\sum \{F_{m(\xi,i)}(u,v) - F_{N_{ii}}(u,v)\}|$$
$$+ (D_{22})\sum |F_{m(\xi,i)}(u,v)|$$
$$+ (D_{22})\sum |F_N(u,v)| \le \varepsilon$$
$$+ \{;/(b-a)\}(b-a) + \varepsilon\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$$
$$+ \varepsilon\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} + \varepsilon\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} + \varepsilon\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \le 6\varepsilon$$

dengan D_{21} dan D_{22} merupakan partisi bagian D_2 berturut-turut untuk $u, v \in X_i$ dan untuk $u, v \in X_j$, dan $([u,v];\xi) \in \Delta$, bila $u, v \in X_i$ maka $\xi = \xi_k$ di atas.

Hasil di atas akan tetap benar untuk setiap patahan $\{X^*_i\}$ dari $\{X_i\}$ dan dengan demikian bukti selesai. ■

III. KESIMPULAN

Penelitian ini telah berhasil menyelesaikan permasalahan yang diungkapkan pada fasal I, justru telah berhasil pula mengungkapkan dua buah teorema kekonvergenan dengan syarat-syarat yang lebih lemah dari teorema-teorema kekonvergenan yang telah dikenal pada integral Kubota-AD. Kedua teorema kekonvergenan dimaksud diungkapkan dengan Teorema 2. 2 dan

Teorema 2. 3. Selanjutnya diperoleh pula kesimpulan : Untuk setiap barisan fungsi $\{f_n\}$, dengan f_n terintegral AH pada selang $[a, b]$ dengan fungsi primitif-AH F untuk n = 1, 2, . , berlaku :

(1) jika barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen rata-rata teritlak pada $[a, b]$, maka terdapat suatu barisan bagian $\{f_n\}$ yang terintegral serentak pada $[a, b]$,

(2) jika barisan $\{f_n\}$ terintegral serentak pada $[a, b]$ maka barisan $\{f_n\}$ konvergen-AD pada $[a, b]$.

DAFTAR PUSTAKA

Kubota, Y., 1964, 1966, 1967 : ***An integral of the Denjoy type, I, II, and III***, *Proc. of the Japan Acad.* vol. 40, vol. 42, vol. 43.

Soedijono, B. and Lee Peng Yee, 1989 : ***The AH integral***, *Proc. the Analysis Conference*, Gadjah Mada University, Yogyakarta, Indonesia.

Soedijono, B. and Lee Peng Yee, 1991 : ***The Kubota Integral***, *Math. Japonica* 36, No. 2, p. 263 – 270.

Soėdijono, B., 1992 : ***A Consructive Proof of the Generalized Mean Convergence theorems for Kubota integral***, *Proc. of the Franco Seams Conference*, I.T.B., Bandung, Indonesia.

Soedijono, B., 1993 : ***Definisi Tipe Riemann Untuk Suatu Generalisasi Integral Henstock***, *Berkala Ilmiah MIPA*, No. 3 Tahun IV, FMIPA – UGM, Yogyakarta.